Mat. 12.

Ushtrimi 1.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$

$(x+3)^2 - 3^2 + (y-2)^2 - 2^2 - 2 = 0$

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 15$

$Q(-3;2) \quad r = \sqrt{15}$

$x^2 + y^2 - 2x - 10y - 55 = 0$

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 81$

$Q_1(1;5) \quad R = 9$

$d_{QQ_1} = \sqrt{(x_{Q_1} - x_Q)^2 + (y_{Q_1} - y_Q)^2} =$

$= \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{25} =$

$= 5$ njësi.

Megjithëse $9 > \sqrt{15} + 5$ d.m.th $R > r + QQ_1 \Rightarrow$ rrethi $x^2+y^2+6x-4y-2$ shtrihet brenda rrethit $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 55 = 0$.

Ushtrimi 2

$$f(x) = 2\,tg\,2x + 5\sin 2x = 2\,\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 5\sin 2x$$

$$f(x) = 0 \iff \sin 2x = 0 \;\vee\; 5 + \frac{2}{\cos 2x} = 0$$

$\sin 2x = 0$

$-180° \le x \le 180°$

$x_1 = 0°$

$x_2 = 90°$

$x_3 = 180°$

$x_4 = -90°$

$x_5 = -180°.$

$$5 + \frac{2}{\cos 2x} = 0$$

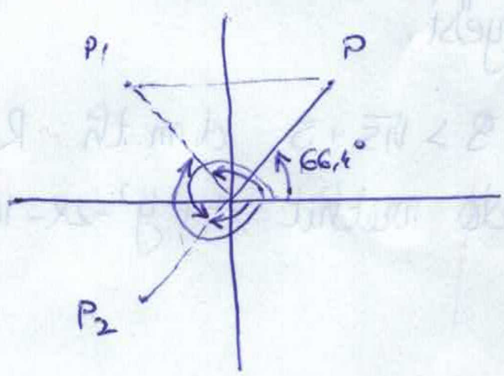
$\cos 2x = -0{,}4 \quad (\cos 2x \neq 0)$

$-180° \le x \le 180°$

Gjejmë një kënd $\alpha \in]0°; 90°[$

që $\cos\alpha = 0{,}4$

$\alpha = 66{,}4°.$



$$2x = 180° - \alpha \implies x_6 = \frac{180° - \alpha}{2}$$

$$2x = 180° + \alpha \implies x_7 = \frac{180° + \alpha}{2}$$

$$2x = -180° + \alpha \implies x_8 = \frac{-180° + \alpha}{2}$$

$$2x = -180° - \alpha \implies x_9 = \frac{-180° - \alpha}{2}$$

x_6, x_7, x_8, x_9 pranohen sepse $\cos 2x \neq 0$.

3) $x^4+2x^3+ax^2+2x+b$

Ushtrimi 3

Mat 12.

polinomi kërkuar i trajtës ax^2+bx+c

$(ax^2)^2=x^4$

$a^2x^4=x^4$

$a^2=1$

$a=\pm 1$

Nga ngritja në katror, shenja minus bëhet plus, pra polinomi ka trajtë:

x^2+px+q

$(x^2+px+q)^2=x^4+p^2x^2+q^2+2px^3+2qx^2+2pqx$

$x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

$x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2=x^4+2x^3+ax^2+2x+b$

$\begin{cases} 2p=2 \\ p^2+2q=a \\ 2pq=2 \\ q^2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ p^2+2q=a \\ 2pq=2 \\ q^2=b \end{cases}$ $\boxed{p=1}$

$2pq=2$

$2\cdot 1q=2$

$\boxed{q=1}$

$b=q^2$

$b=1^2$

$\boxed{b=1}$

$a=p^2+2q$

$a=1^2+2\cdot 1$

$\boxed{a=3}$

Pra, polinomi: x^2+x+1

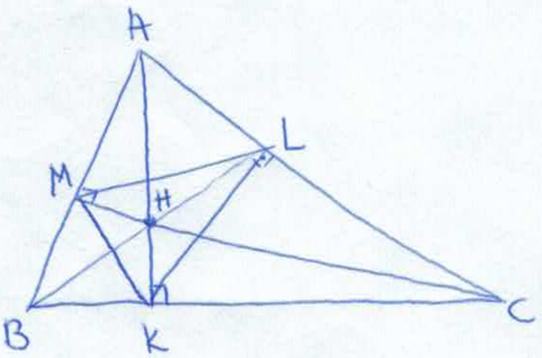
Ushtrimi 4.

Le të jetë H pikprerja e lartësive të trekëndëshit ABC, katërkëndëshi ALHM i jashtëshkruhet rrethi me diameter AH (Megjithëse $\widehat{ALH}$ është i barabartë me $\widehat{AMH} = 90^\circ$) Pra $\widehat{ALM} = \widehat{AHM}$ (1) Në të njëjtën mënyrë duke përdorur katërkëndëshin HLCK vërtetohet barazimi $\widehat{CLK} = \widehat{CHK}$ (2)

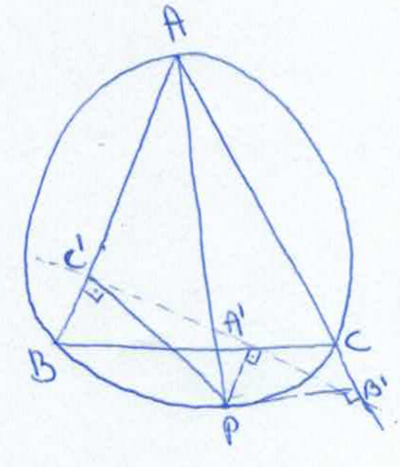
Megjithëse $\widehat{AHM} = \widehat{CHK}$ atëherë nga barazimet (1) dhe (2) marrim $\widehat{ALM} = \widehat{CLK}$ që nga nxjerrim barazimin e këndeve plotësuese të tyre $\widehat{MLB} = \widehat{KLB}$

Njëlloj vërtetohet edhe për këndet e tjera tjera të trekëndëshit MLK

Shënim: Kemi edhe një rast tjetër kur pika H ndodhet jashtë trekëndëshit ABC (këndgjerë)



Ushtrimi 5.



Le të jetë P një pikë e rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit ABC dhe A', B', C' këmbët e pingulave të hequra nga pika P përkatësisht mbi brinjët BC, AC, AB. të trekëndëshit

Po marrim për konkretizim. për rastin kur P-ja ndodhet në harkun BC

Meqënëse $\widehat{PA'C} = 90° = \widehat{PB'C}$ atëherë pikat P, B', C, A' ndodhen në rrethin me diametër PC

Pra $\widehat{PB'A'} = \widehat{PCA'}$ (1)

Në të njëjtën mënyrë vërtetohet barazimi $\widehat{PB'C'} = \widehat{PAC'}$ (2)

Meqënëse pikat A, B, C, P ndodhen në një rreth atëherë

$\widehat{PCB} = \widehat{PAB'}$

d.m.th. $\widehat{PCA'} = \widehat{PAC'}$ (3)

Nga barazimet (1), (2), (3) rrjedh vërtetësia e barazimit

$\widehat{PB'A'} = \widehat{PB'C'}$ (4).

Që këtej del se drejtëza $B'A'$ përputhet me $B'C'$ pra pikat A', B', C' ndodhen në një drejtëz.

b) Pohimi i anasjelltë

Le të zëmë se këmbët A', B', C' të pingulave të hequra nga një pikë P përkatësisht mbi brinjët BC, CA, AB të ΔABC ndodhen në një drejtëz.

Të vërtetojmë se pika P ndodhet në rrethin e jashtëshkruar ΔABC

Meqënëse pikat P, A', C, B' ndodhen në një rreth, atëherë ~~k~~ $\widehat{PB'A'} = \widehat{PCA'}$ (1')

Në të njëjtën mënyrë vërtetohet barazimi $\widehat{PB'C'} = \widehat{PAC'}$ (2')

Meqënëse sipas kushtit pikat B', A', C' ndodhen ~~një~~ në një drejtëz, atëherë $\widehat{PB'A'} = \widehat{PB'C'}$ (3'). Nga barazimet (1'), (2'), (3') rrjedh barazimi $\widehat{PCA'} = \widehat{PAC'}$ d.m.th $\widehat{PCB} = \widehat{PAB}$. Barazimi i fundit tregon se pikat P, A, B, C ndodhen në një rreth.