

Zgjidhjet për M 10

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left[ \left( \frac{1}{3-x} + \frac{x}{x^2-9} \right) : \left( \frac{x}{x+3} - 1 \right) \right] \cdot (x^2-6x+9) = \left[ \left( \frac{1}{3-x} + \frac{x}{(x-3)(x+3)} \right) : \left( \frac{x-(x+3)}{x+3} \right) \right] \cdot (x-3)^2 = \\ & = \left[ \left( \frac{1}{3-x} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} \right) : \left( \frac{-3}{x+3} \right) \right] \cdot (x-3)^2 = \left[ \left( \frac{x+3-x}{(3-x)(x+3)} \right) : \left( \frac{-3}{x+3} \right) \right] \cdot (x-3)^2 = \\ & = \left[ \frac{3}{(3-x)(x+3)} \cdot \frac{(x+3)}{-3} \right] \cdot (x-3)^2 = \frac{1}{-(3-x)} (x-3)^2 = \frac{(x-3)^2}{(x-3)} = x-3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3^{xy} = 81 \\ 5^{x+y-1} = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{xy} = 3^4 \\ 5^{x+y-1} = 5^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 4 \\ x+y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(4-x)=4 \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4x-4=0 \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Zgjidhje e sistemit është çifti (2, 2)

$$\textcircled{3} \text{ Dëshmimi i pasbarazimit: } a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

Çmohet me diferencën:

$$(a^2+b^2+c^2) - (ab+ac+bc) = \frac{2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+ac+bc)}{2} =$$

$$= \frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{2} = \frac{(a^2-2ab+b^2) + (a^2-2ac+c^2) + (b^2-2bc+c^2)}{2}$$

$$= \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} \geq 0$$

Barazimi vërehet kur  $a=b=c$

④ Cili nga numrat është më i madh?

$$\text{Shënjoj } 19^{1998} = a$$

$$\text{Atëherë } \frac{19^{1998} + 1}{19^{1999} + 1} = \frac{a + 1}{19a + 1} \text{ dhe } \frac{19^{1999} + 1}{19^{2000} + 1} = \frac{19a + 1}{19^2 a + 1}$$

$$\text{Pjestojmë } \frac{a + 1}{19a + 1} : \frac{19a + 1}{19^2 a + 1} = \frac{a + 1}{19a + 1} \cdot \frac{19^2 a + 1}{19a + 1} =$$

$$= \frac{(a + 1) \cdot (19^2 a + 1)}{(19a + 1)^2} = \frac{361a^2 + 362a + 1}{361a^2 + 38a + 1} > 1.$$

Meqenëse thyesa është më e madhe se 1, themi se numri i parë  $\frac{19^{1998} + 1}{19^{1999} + 1}$  është më i madhi.

5

PC → tangjente me rrethin  
OP // AC

Përfundimi a) PB → tangjente me rrethin  
b) OBPC i jashtëshkruhet rrethi

Zgjidhje

a) Meqenëse  $OP // AC$  rrëdh se  
 $\angle POB = \angle OAC$  si përfaqësues  
 $\angle POC = \angle OCA$  si këndet notëruar

Por  $\angle OAC = \angle OCA$  si këndet në bazë të  
trëkëndëshit dybrinjëshëm  $OAC$ .

Prandaj  $\angle POB = \angle POC$ .

Rrëdh se  $\triangle POB = \triangle POC$  sepse  $OP$  e përbashkët,  
 $OB = OC$  (si rreze) dhe  $\angle POB = \angle POC$ . (B.K.B)

Nga konrazimi i trëkëndëshave rrëdh se  $\angle PBO = \angle PCO$   
Meqenëse  $\angle PCO = 90^\circ$  sepse  $PC$  është tangjente me rrethin,  
atëherë dhe  $\angle PBO = 90^\circ$  që do të thotë se  $PB$  është  
tangjente me rrethin.  $PB \perp OB$

b) Në katërkëndëshin  $OBPC$  këndet e kundërt  
 $\angle PBO$  dhe  $\angle PCO$  janë shtuesë:

$$\angle PBO + \angle PCO = 180^\circ$$

Prandaj këtij katërkëndëshi i jashtëshkruhet  
rrethi.

